

הצעה לפתרון מלא — מערכות חשמל

בגרות · קיץ תשפ"ג 2023 · שאלון 845381 · שאלות 1–12

✦ בנוי על ידי פהד גאנץ ✦

על המסמך: הצעה לפתרון מלא לשאלון 845381 — מערכות חשמל, קיץ תשפ"ג 2023. בשאלון שתיים עשרה שאלות ועל הנבחן לענות על חמש בלבד. שאלות 1–8 לכלל הנבחנים, 9–10 לתלמידי הנדסת חשמל, 11–12 לתלמידי בקרת אקלים. 💡

שאלה 1 — מעגל משולב בזרם ישר

נתונים: $E = 24V$ · $R_1 = 5 \Omega$ · $R_2 = 15 \Omega$ · $R_3 = 24 \Omega$ · $R_4 = 10 \Omega$ · $R_5 = 20 \Omega$

מבנה המעגל:  הענף העליון (R_1 ו- R_2 בטור) והענף התחתון (R_4 ו- R_5 בטור) מחוברים במקביל בין שני צמתים, והצירוף המקבילי מחובר בטור לנגד R_3 ולמקור.

סעיף א — ההתנגדות השקולה של המעגל

שני הנגדים בכל ענף מחוברים בטור, ושני הענפים מחוברים במקביל זה לזה. הצירוף המקבילי מחובר בטור לנגד R_3 :

$$R_{12} = R_1 + R_2 = 5 + 15 = 20 \Omega$$

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 10 + 20 = 30 \Omega$$

$$R_p = \frac{R_{12} \cdot R_{45}}{R_{12} + R_{45}} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = \frac{600}{50} = 12 \Omega$$

$$R_T = R_3 + R_p = 24 + 12 = 36 \Omega$$

$$R_T = 36 \Omega$$

סעיף ב — קריאת הזרם דרך R_4 והמתח על R_1

מד-הזרם מחובר בטור לנגד R_4 בתוך הענף התחתון, כאשר ההדק החיובי שלו פונה לכיוון שממנו מגיע הזרם. מד-המתח מחובר במקביל לנגד R_1 , כאשר ההדק החיובי שלו מחובר לנקודה בעלת הפוטנציאל הגבוה (הצד הקרוב להדק החיובי של המקור). המתח על הצירוף המקבילי משותף לשני הענפים, ולכן הזרם בכל ענף מתקבל מחלוקת מתח זה בהתנגדות הטורית של אותו ענף:

$$I_T = \frac{E}{R_T} = \frac{24}{36} = 0.667 \text{ A}$$

$$U_p = I_T \cdot R_p = 0.667 \times 12 = 8 \text{ V}$$

$$I(R_4) = \frac{U_p}{R_{45}} = \frac{8}{30} = 0.267 \text{ A}$$

$$I(R_1) = \frac{U_p}{R_{12}} = \frac{8}{20} = 0.4 \text{ A}$$

$$U(R_1) = I(R_1) \cdot R_1 = 0.4 \times 5 = 2 \text{ V}$$

$$I(R_4) = 0.267 \text{ A} ; U(R_1) = 2 \text{ V}$$

סעיף ג — ההספק המתפתח על R_3

דרך R_3 זורם הזרם הכללי של המעגל, מפני שהוא מחובר בטור למקור:

$$P(R_3) = I_T^2 \cdot R_3 = 0.667^2 \times 24 = 10.67 \text{ W}$$

$$P(R_3) = 10.67 \text{ W}$$

שאלה 2 — שני מקורות, שיטת מתחי הצמתים

נתונים: $E_1 = 52V$ · $E_2 = 75V$ · $R_1 = 10 \Omega$ · $R_2 = 60 \Omega$ · $R_3 = 30 \Omega$ · $R_4 = 60 \Omega$

מבנה המעגל: E_1 בטור ל- R_1 בענף השמאלי; E_2 בענף הימני; R_2 ו- R_3 במקביל בין צומת A לצומת הימני; R_4 בין צומת A לצומת B.

סעיף א — הזרמים בכל אחד מן הנגדים

נבחר את צומת B כנקודת ייחוס (פוטנציאל אפס) ונסמן את מתח צומת A ב- U_A . הנגדים R_2 ו- R_3 מחוברים במקביל:

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{60 \times 30}{90} = 20 \Omega$$

נכתוב משוואת זרמים לצומת A לפי חוק הזרמים של קירכהוף:

$$\frac{E_1 - U_A}{R_1} + \frac{E_2 - U_A}{R_{23}} = \frac{U_A}{R_4}$$

$$\frac{52 - U_A}{10} + \frac{75 - U_A}{20} = \frac{U_A}{60}$$

$$6(52 - U_A) + 3(75 - U_A) = U_A \rightarrow 312 + 225 = 10 U_A \rightarrow U_A = 53.7 V$$

כעת נחשב את הזרם בכל נגד:

$$I(R_1) = \frac{52 - 53.7}{10} = -0.17 \text{ A} \rightarrow |I(R_1)| = 0.17 \text{ A}$$

$$U_{23} = 75 - 53.7 = 21.3 \text{ V}$$

$$I(R_2) = \frac{21.3}{60} = 0.355 \text{ A}$$

$$I(R_3) = \frac{21.3}{30} = 0.71 \text{ A}$$

$$I(R_4) = \frac{53.7}{60} = 0.895 \text{ A}$$

בדיקה בצומת A: הסכום $0.895 = 0.17 - 0.71 + 0.355$ מתאזן ✓. הסימן השלילי של הזרם ב- R_1 מלמד שהזרם זורם בפועל מצומת A לכיוון המקור E_1 , כלומר המקור E_1 נטען.

$$I(R_1) = 0.17 \text{ A} ; I(R_2) = 0.355 \text{ A} ; I(R_3) = 0.71 \text{ A} ; I(R_4) = 0.895 \text{ A}$$

סעיף ב — המתח בין הנקודות A ו-B

המתח בין A ל-B הוא בדיוק מתח הצומת שחישבנו, מפני ש-B נבחרה כנקודת הייחוס:

$$U_{AB} = U_A - U_B = 53.7 - 0 = 53.7 \text{ V}$$

$$U_{AB} = 53.7 \text{ V}$$

סעיף ג — ההספק המתפתח על R_3

$$P(R_3) = I(R_3)^2 \cdot R_3 = 0.71^2 \times 30 = 15.12 \text{ W}$$

$$P(R_3) = 15.12 \text{ W}$$

שאלה 3 — מעגל קבלים

נתונים: $C_1 = 60\mu\text{F}$ · $C_2 = 15\mu\text{F}$ · $C_3 = 5\mu\text{F}$ · $C_4 = 30\mu\text{F}$ · מד-מתח על C_4 קורא 50V

מבנה המעגל: C_2 ו- C_3 מחוברים במקביל, והצירוף שלהם מחובר בטור ל- C_1 ול- C_4 . מד-מתח אידיאלי מחובר במקביל ל- C_4 .

סעיף א — הקיבול השקול של המעגל

הקבלים C_2 ו- C_3 מחוברים במקביל, ולכן קיבוליהם מתחברים. הצירוף שלהם מחובר בטור ל- C_1 ול- C_4 :

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 15 + 5 = 20 \mu\text{F}$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{60} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{6}{60}$$

$$C_T = 10 \mu\text{F}$$

$$C_T = 10 \mu\text{F}$$

סעיף ב — מתח המקור E

מד-המתח מודד את המתח על C_4 , ולכן ניתן לחשב את המטען עליו. בחיבור טורי המטען זהה בכל הקבלים, ולכן זהו גם המטען הכללי:

$$Q = C_4 \cdot U(C_4) = 30 \times 50 = 1500 \mu\text{C}$$

$$E = \frac{Q}{C_T} = \frac{1500}{10} = 150 \text{ V}$$

בדיקה: המתח על C_1 הוא 25V, על הצירוף המקבילי 75V ועל C_4 המתח 50V, וסכומם 150V — מתאים.

$$E = 150 \text{ V}$$

סעיף ג — המטען האגור בקבל C_2

תחילה נחשב את המתח על הצירוף המקבילי, המשותף ל- C_2 ול- C_3 :

$$U_{23} = \frac{Q}{C_{23}} = \frac{1500}{20} = 75 \text{ V}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot U_{23} = 15 \times 75 = 1125 \text{ } \mu\text{C}$$

$$Q_2 = 1125 \text{ } \mu\text{C} = 1.125 \text{ mC}$$

סעיף ד — האנרגייה הכללית האצורה במעגל

$$W = \frac{1}{2} C_T \cdot E^2 = 0.5 \times 10 \times 10^{-6} \times 150^2 = 0.1125 \text{ J}$$

$$W = 0.1125 \text{ J} = 112.5 \text{ mJ}$$

שאלה 4 — מעגל חד-חוגי עם שלושה מקורות

נתונים: $E_1 = 12V$, $E_2 = 3V$, $E_3 = 6V$, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 0.5\ \Omega$, $R_3 = 1.5\ \Omega$. מפסק S במקביל ל- R_1 .

⚠ **קריאת הקוטביות:** על-פי הסימון באיור המקור E_1 פועל בכיוון אחד, ואילו E_2 ו- E_3 פועלים נגדו.

סעיף א — קריאת מד-הזרם כאשר המפסק S פתוח

כאשר S פתוח, הזרם עובר דרך R_1 . לפי חוק המתחים של קירכהוף, הכא"מ השקול הוא הפרש הכא"מים, וההתנגדות הכוללת היא סכום כל ההתנגדויות בחוג:

$$I = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{12 - 3 - 6}{1 + 0.5 + 1.5} = \frac{3}{3} = 1\text{ A}$$

$$I = 1\text{ A}$$

סעיף ב — המתח בין הנקודות A ו-B (S פתוח)

נעבור מנקודה A לנקודה B דרך הענף התחתון (המקור E_1 והנגד R_1). המתח הפנימי של המקור מעלה את הפוטנציאל ב-12V, ועל R_1 יש מפל מתח בכיוון הזרם:

$$U_B = U_A + E_1 - I \cdot R_1 = U_A + 12 - 1 \times 1 = U_A + 11$$

$$U_{AB} = U_A - U_B = -11\text{ V}$$

בדיקה דרך הענף השני (מ-B ל-A דרך E_3 , R_3 , E_2): $6 + 1.5 + 3 + 0.5 = 11V$ — מתקבלת אותה תוצאה. נקודה B נמצאת בפוטנציאל גבוה יותר מנקודה A.

$$U_{AB} = -11\text{ V} \quad (|U_{AB}| = 11\text{ V, נקודה B ביחס ל A-חיובית ביחס ל B נקודה, כלומר)}$$

סעיף ג — ההספק על R_2 כאשר סוגרים את המפסק S

סגירת המפסק מקצרת את הנגד R_1 (הזרם עובר דרך המפסק במקום דרך הנגד), ולכן ההתנגדות הכוללת קטנה:

$$I' = \frac{E_1 - E_2 - E_3}{R_2 + R_3} = \frac{3}{0.5 + 1.5} = 1.5 \text{ A}$$

$$P(R_2) = I'^2 \cdot R_2 = 1.5^2 \times 0.5 = 1.125 \text{ W}$$

$$P(R_2) = 1.125 \text{ W}$$

שאלה 5 — מעגל RLC טורי בזרם חילופין

נתונים: $R = 80 \Omega \cdot L = 0.3H \cdot C = 50\mu F \cdot U = 120V \cdot f = 50Hz$

סעיף א — עכבת המעגל ואופיו

נחשב את ההיגב ההשראותי ואת ההיגב הקיבולי, ומהם את גודל העכבה:

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 50 \times 0.3 = 94.25 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 50 \times 10^{-6}} = 63.66 \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{80^2 + 30.59^2} = \sqrt{7335.7} = 85.65 \Omega$$

היגב המשרן גדול מהיגב הקבל, ההיגב הכולל חיובי ואופי המעגל השראותי — הזרם מפגר אחרי המתח בזווית:

$$\phi = \arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right) = \arctan\left(\frac{30.59}{80}\right) = 20.9^\circ$$

$Z = 85.65 \Omega$; (הזרם מפגר אחרי המתח, $\phi = 20.9^\circ$, אופי המעגל השראותי)

סעיף ב — עוצמת הזרם

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{85.65} = 1.4 \text{ A}$$

$$I = 1.4 \text{ A}$$

סעיף ג — המתח על הסליל, על הנגד ועל הקבל

$$U_L = I \cdot X_L = 1.4 \times 94.25 = 132 \text{ V}$$

$$U_R = I \cdot R = 1.4 \times 80 = 112.1 \text{ V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 1.4 \times 63.66 = 89.2 \text{ V}$$

$$U_L = 132 \text{ V} ; U_R = 112.1 \text{ V} ; U_C = 89.2 \text{ V}$$

שימו לב: סכום המתחים גדול מ-120V מפני שבמעגל חילופין המתחים מתחברים באופן וקטורי ולא אלגברי. 💡

סעיף ד — תרשים פאזורי של מתחי המעגל

הזרם I משמש ציר ייחוס אופקי, מפני שהוא משותף לכל הרכיבים בחיבור טורי. הפאזור U_R בגודל 112.1V מצויר על ציר הייחוס בכיוון הזרם. הפאזור U_L בגודל 132V מצויר כלפי מעלה, מקדים את הזרם ב- 90° . הפאזור U_C בגודל 89.2V מצויר כלפי מטה, מפגר אחרי הזרם ב- 90° . הפאזור U של מתח המקור הוא הסכום הווקטורי — 120V בזווית $+20.9^\circ$ ביחס לזרם, כאשר ההפרש $U_L - U_C = 42.9\text{V}$ הוא הרכיב האנכי ו- U_R הוא הרכיב האופקי.

שאלה 6 — מעגל מקבילי בזרם חילופין

נתונים: $U = 230V \angle 0^\circ$ · $R = 460 \Omega$ · $X_L = 500 \Omega$ · $X_C = 230 \Omega$ חיבור מקבילי

סעיף א — פאזורי הזרמים

במעגל מקבילי המתח משותף לכל הענפים. בנגד הזרם בפאזה עם המתח, בסליל הזרם מפגר ב- 90° , ובקבל הזרם מקדים ב- 90° . הזרם הכללי הוא הסכום הפאזורי של שלושת הזרמים:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{230}{460} = 0.5 \angle 0^\circ \text{ A}$$

$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{230}{500} = 0.46 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{230}{230} = 1 \angle +90^\circ \text{ A}$$

$$I_T = I_R + I_L + I_C = 0.5 + j(1 - 0.46) = 0.5 + j0.54 \text{ A}$$

$$|I_T| = \sqrt{0.5^2 + 0.54^2} = 0.736 \text{ A} ; \quad \theta = \arctan\left(\frac{0.54}{0.5}\right) = +47.2^\circ$$

$$I_R = 0.5 \angle 0^\circ \text{ A} ; I_L = 0.46 \angle -90^\circ \text{ A} ; I_C = 1 \angle 90^\circ \text{ A} ; I_T = 0.736 \angle +47.2^\circ \text{ A}$$

סעיף ב — ההספק הפעיל, ההיגבי והמדומה

$$P = U \cdot I_R = 230 \times 0.5 = 115 \text{ W}$$

$$Q = U \cdot (I_C - I_L) = 230 \times (1 - 0.46) = 124.2 \text{ var}$$

$$S = U \cdot I_T = 230 \times 0.736 = 169.3 \text{ VA}$$

בדיקה לפי משולש ההספקים:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{115^2 + 124.2^2} = 169.3 \text{ VA} \quad \checkmark$$

$$P = 115 \text{ W} ; Q = 124.2 \text{ var (קִיבּוּלִי)} ; S = 169.3 \text{ VA}$$

סעיף ג — משולש ההספקים ואופי המעגל

בתיאור משולש ההספקים הניצב האופקי הוא ההספק הפעיל $P = 115\text{W}$, הניצב האנכי (כלפי מעלה, מפני שהמעגל קיבולי) הוא ההספק ההיגבי $Q = 124.2\text{var}$, והיתר הוא ההספק המדומה $S = 169.3\text{VA}$, כאשר הזווית בין P ל- S היא 47.2° . אופי המעגל קיבולי, מפני שזרם הקבל גדול מזרם הסליל והזרם הכללי מקדים את המתח (מקדם ההספק $\cos \varphi = 0.68$ קיבולי).

שאלה 7 — רשת תלת-מופעית, עומס סימטרי בחיבור כוכב

נתונים: U (קווי) = $400V \cdot f = 50Hz \cdot Z = 6 + j8 \Omega$ לכל מופע · חיבור כוכב

סעיף א — הזרם הקווי והזרם המופעי

בחיבור כוכב המתח המופעי קטן פי שורש שלוש מהמתח הקווי, והזרם הקווי שווה לזרם המופעי:

$$|Z| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \Omega ; \phi = \arctan\left(\frac{8}{6}\right) = 53.13^\circ$$

$$U(\text{מופע}) = \frac{U(\text{קווי})}{\sqrt{3}} = \frac{400}{1.732} = 230.9 V$$

$$I(\text{מופע}) = \frac{230.9}{10} = 23.09 A$$

$$I(\text{קווי}) = I(\text{מופע}) = 23.09 A$$

$$I(\text{מופע}) = I(\text{קווי}) = 23.09 A \quad (53.13^\circ \text{ ב-} I(\text{קווי}) = I(\text{מופע}))$$

סעיף ב — ההספק הפעיל, ההיגבי והמדומה של הרשת

$$\cos \phi = \frac{R}{|Z|} = \frac{6}{10} = 0.6 ; \sin \phi = \frac{X}{|Z|} = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U(\text{קווי}) \cdot I(\text{קווי}) = 16000 = 23.09 \times 400 \times 1.732 VA$$

$$P = S \cdot \cos \phi = 16000 \times 0.6 = 9600 W$$

$$Q = S \cdot \sin \phi = 16000 \times 0.8 = 12800 var$$

$$P = 9.6 kW ; Q = 12.8 kvar ; S = 16 kVA$$

סעיף ג — משולש ההספקים של הרשת

משולש ישר-זווית שבו הניצב האופקי הוא ההספק הפעיל $P = 9.6kW$, הניצב האנכי (כלפי מעלה — עומס השראותי) הוא ההספק ההיגבי $Q = 12.8kvar$, והיתר הוא ההספק המדומה $S = 16kVA$. הזווית בין P ל- S היא ϕ

$\phi = 53.13^\circ$.

סעיף ד — מקדם ההספק של הרשת

$$\cos \phi = \frac{P}{S} = \frac{9600}{16000} = 0.6$$

$$\cos \phi = 0.6 \text{ (השראותי, בפיגור)}$$

שאלה 8 — מעגל תהודה טורי

נתונים: מצב תהודה · $L_1 = L_2 = 5\text{ mH}$ · $R = 20\ \Omega$ בטור · $C_1 = C_2 = 2\ \mu\text{F}$ במקביל · $I(C_1) = 1\text{ A}$

סעיף א — הקיבול השקול וההשראות השקולה

הסלילים מחוברים בטור ולכן ההשראויות מתחברות; הקבלים מחוברים במקביל ולכן הקיבולים מתחברים:

$$L_T = L_1 + L_2 = 5 + 5 = 10\text{ mH}$$

$$C_T = C_1 + C_2 = 2 + 2 = 4\ \mu\text{F}$$

$$L_T = 10\text{ mH} ; C_T = 4\ \mu\text{F}$$

סעיף ב — תדר התהודה של המעגל

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_T \cdot C_T}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{10 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{2\pi \times 2 \times 10^{-4}} = 795.8\text{ Hz}$$

$$f_0 = 795.8\text{ Hz} \quad (\omega_0 = 5000\text{ rad/s})$$

סעיף ג — מתח המקור U

שני הקבלים שווים ומחוברים במקביל, ולכן הזרם הכללי מתחלק ביניהם שווה בשווה. במצב תהודה ההיגב ההשראותי וההיגב הקיבולי מבטלים זה את זה, והעכבה הכוללת שווה להתנגדות בלבד:

$$I = 2 \cdot I(C_1) = 2 \times 1 = 2\text{ A}$$

$$Z = R = 20\ \Omega$$

$$U = I \cdot R = 2 \times 20 = 40\text{ V}$$

$$U = 40\text{ V}$$

סעיף ד — המתח על כל אחד מהסלילים

$$X_{L1} = \omega_0 \cdot L_1 = 5000 \times 5 \times 10^{-3} = 25 \ \Omega$$

$$U_{L1} = U_{L2} = I \cdot X_{L1} = 2 \times 25 = 50 \text{ V}$$

בדיקה: המתח הכולל על שני הסלילים 100V שווה בגודלו למתח על הקבלים, כנדרש במצב תהודה.

$$U_{L1} = U_{L2} = 50 \text{ V}$$

שאלה 9 — מימוש פונקצייה בשערים לוגיים

נתונים: מהאיור — A, B דרך שערי NOT אל שער AND · מוצא ה-AND עם C אל שער NAND · מוצא ה-NAND עם $\bar{C}$ אל שער OR שמוצא F

סעיף א — כתיבת ביטוי עבור הפונקצייה

נעקוב אחרי המעגל שלב אחרי שלב: מוצא שער ה-AND הוא $\bar{A} \cdot \bar{B}$; מוצא שער ה-NAND הוא $\overline{(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C)}$ ולבסוף שער ה-OR מוסיף את $\bar{C}$:

$$F(A, B, C) = \overline{(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C)} + \bar{C}$$

$$F(A, B, C) = \overline{(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C)} + \bar{C}$$

סעיף ב — פישוט הפונקצייה למינימום משתנים

נפעיל את משפט דה-מורגן על האיבר הראשון ואז נכנס איברים זהים:

$$\overline{(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C)} = A + B + \bar{C}$$

$$F = A + B + \bar{C} + \bar{C} = A + B + \bar{C}$$

$$F = A + B + \bar{C} \quad (\text{שלושה ליטרלים})$$

הסבר: הפונקצייה שווה 0 רק כאשר $A = 0, B = 0, C = 1$, ובכל שאר המקרים היא שווה 1. 💡

סעיף ג — ביטוי הפונקצייה באמצעות מערכת מתגים

הפונקצייה $F = A + B + \bar{C}$ ממומשת בשלושה מגעים מחוברים במקביל בין מקור המתח לעומס (למשל נורה): מגע A הוא מגע רגיל פתוח (NO) הנסגר כאשר $A = 1$; מגע B הוא מגע רגיל פתוח (NO) הנסגר כאשר B

1 =; ומגע C הוא מגע רגיל סגור (NC) המוליך כאשר $C = 0$ (ומממש את $\bar{C}$). די בכך שאחד משלושת הענפים מוליך כדי שהעומס יקבל מתח — בהתאם לפעולת OR.

שאלה 10 — מפת קרנו

נתונים: מפת קרנו של הפונקצייה $F(A,B,C)$ — שורה $C=0$: (לפי $AB=00,01,11,10$) $1,1,0,1$ · שורה $C=1$: $0,0,1,1$

סעיף א — טבלת אמת

מהמפה נובע שהפונקצייה מקבלת 1 בצירופים (A,B,C) : 000, 010, 100, 101, 111:

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

סעיף ב — פישוט הפונקצייה על-פי מפת קרנו

מפת קרנו — שורות לפי C , עמודות לפי AB :

$C \setminus AB$	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1

נאתר שלוש קבוצות של זוגות תאים סמוכים: זוג התאים $AB=00$ ו- $AB=01$ בשורה $C=0$ נותן את האיבר $\bar{A} \cdot \bar{C}$ (המשתנה B מצטמצם); זוג התאים בעמודה $AB=10$ בשתי השורות נותן את האיבר $A \cdot \bar{B}$ (המשתנה C מצטמצם); זוג התאים $AB=10$ ו- $AB=11$ בשורה $C=1$ נותן את האיבר $A \cdot C$ (המשתנה B מצטמצם):

$$F = \bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} + A \cdot C$$

בדיקה: הצבת כל שמונה הצירופים בביטוי המפושט מחזירה בדיוק את ערכי המפה הנתונה.

$$F = \bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} + A \cdot C$$

סעיף ג — מימוש הפונקצייה המפושטת בשערים לוגיים

מימוש ישיר של הביטוי המפושט דורש שני שערי NOT ליצירת $\bar{A}$ ו- $\bar{C}$; שלושה שערי AND דו-כניסיים — הראשון מקבל $\bar{A}$ ו- $\bar{C}$, השני מקבל A ו- $\bar{B}$, השלישי מקבל A ו-C (נדרש גם מהפך שלישי עבור $\bar{B}$, או שימוש בכניסה מהופכת); ושער OR תלת-כניסי המחבר את מוצאי שלושת שערי ה-AND ונותן את F.

שאלות 11-12 — לתלמידי בקרת אקלים 🌡️

שאלה 11 — תהליכים בגז אידיאלי

נתונים: A: $P=1\text{atm}$, $V=7\text{L}$ · B: $P=1\text{atm}$, $V=2\text{L}$ · C: $P=4\text{atm}$, $V=2\text{L}$

סעיף א — נתוני הגז בנקודות A, B ו-C

נתוני הנקודות מהגרף:

$$\text{A: } P = 1 \text{ atm} , \quad V = 7 \text{ L}$$

$$\text{B: } P = 1 \text{ atm} , \quad V = 2 \text{ L}$$

$$\text{C: } P = 4 \text{ atm} , \quad V = 2 \text{ L}$$

לפי משוואת הגז האידיאלי $PV = nRT$, הטמפרטורה בנקודה B קטנה פי 3.5 מאשר בנקודה A (יחס $2/7$), והטמפרטורה בנקודה C גדולה פי 4 מאשר בנקודה B, כלומר פי $8/7$ מהטמפרטורה בנקודה A:

$$T_B = \frac{2}{7} T_A ; \quad T_C = 4 T_B = \frac{8}{7} T_A$$

$$T_B = \frac{2}{7} T_A ; \quad T_C = \frac{8}{7} T_A$$

סעיף ב — שמות התהליכים

בתהליך מנקודה A לנקודה B הלחץ קבוע (1atm) והנפח קטן מ-7 ל-2 ליטר — זהו תהליך איזוברי (דחיסה בלחץ קבוע). בתהליך מנקודה B לנקודה C הנפח קבוע (2 ליטר) והלחץ עולה מ-1 ל- 4atm — זהו תהליך איזוכורי (חימום בנפח קבוע).

סעיף ג — העבודה הכוללת שנעשתה על-ידי הגז

בתהליך איזוברי העבודה שנעשית על-ידי הגז היא מכפלת הלחץ בשינוי הנפח; בתהליך איזוכורי לא נעשית עבודה כלל. נניח $1\text{atm} = 100,000\text{Pa}$ וכן 1 ליטר $= 0.001\text{m}^3$:

$$W_{AB} = P \cdot (V^B - V^A) = 1 \times 10^5 \times (0.002 - 0.007) = -500 \text{ J}$$

$$W_{BC} = 0$$

$$W_{\text{total}} = W_{AB} + W_{BC} = -500 \text{ J}$$

הסימן השלילי מציין שהנפח קטן, כלומר הסביבה דחסה את הגז והעבודה נעשתה על הגז ולא על-ידיו.

$$W_{\text{total}} = -500 \text{ J} \text{ (500 נעשתה עבודה של 500 J)}$$

שאלה 12 — אוויר בכלי סגור

נתונים: $V = 30 \text{ L} = 0.03 \text{ m}^3$, $m = 0.4 \text{ kg}$ הנפח קבוע לכל אורך התהליך

סעיף א — טמפרטורת האוויר כפונקצייה של הלחץ

מכיוון שהכלי סגור, הנפח והמסה קבועים, וממשוואת המצב של גז אידיאלי $PV = mRT$ נובע שהטמפרטורה המוחלטת עומדת ביחס ישר ללחץ. הגרף של T כפונקצייה של P הוא קו ישר העולה ועובר דרך ראשית הצירים: הכפלת הלחץ מכפילה את הטמפרטורה המוחלטת (תהליך איזוכורי — חוק גיי-ליסאק).

סעיף ב — חישוב הטמפרטורה בלחץ של 30atm

נשתמש בממשוואת המצב של גז אידיאלי, עם קבוע הגז של אוויר $R = 287 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$ ולחץ $1 \text{ atm} = 101,325 \text{ Pa}$:

$$P = 30 \times 101325 = 3039750 \text{ Pa}$$

$$T = \frac{P \cdot V}{m \cdot R} = \frac{3039750 \times 0.03}{0.4 \times 287} = \frac{91192.5}{114.8} = 794.4 \text{ K}$$

$$t = 794.4 - 273.15 = 521.2 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

$$t^{\text{F}} = 1.8 \times 521.2 + 32 = 970.2 \text{ }^{\circ}\text{F}$$

$$T = 794.4 \text{ K} \rightarrow t = 521.2 \text{ }^{\circ}\text{C} = 970.2 \text{ }^{\circ}\text{F}$$

סעיף ג — השינוי בלחץ ובטמפרטורה לאחר הוצאת 8kcal

התהליך מתרחש בנפח קבוע, ולכן נשתמש בחום הסגולי בנפח קבוע של אוויר $c_v = 0.171 \text{ kcal/(kg}\cdot\text{K)}$:

$$\Delta T = \frac{Q}{m \cdot c_v} = \frac{8}{0.4 \times 0.171} = 117 \text{ K}$$

$$T_2 = 794.4 - 117 = 677.4 \text{ K}$$

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 30 \times \frac{677.4}{794.4} = 25.6 \text{ atm}$$

$$\Delta P = 30 - 25.6 = 4.4 \text{ atm}$$

הטמפרטורה יורדת ב-117 קלווין והלחץ יורד ב-4.4 אטמוספרות.

T: 794.4 K $\rightarrow$ 677.4 K ; P: 30 atm $\rightarrow$ 25.6 atm