

הצעה לפתרון מלא — מערכות חשמל

בגרות · מועד 2021 · שאלון 845381 · שאלות 1-10

✦ בנוי על ידי פהד גאנץ ✦

על המסמך: הצעה לפתרון מלא לשאלון 845381 — מערכות חשמל, מועד 2021. בשאלון עשר שאלות בשלושה פרקים: פרק ראשון — מעגלי זרם ישר (שאלות 1-4), פרק שני — זרם חילופין (שאלות 5-8), ופרק שלישי — מערכות ספרתיות (שאלות 9-10).

שאלה 1 — לולאה עם נגד בטור וצירוף מקבילי

נתונים: $E = 48V$, $R_1 = 7\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$

מבנה המעגל: הנגד R_1 מחובר בטור למקור; הנגד R_2 מחובר במקביל לצירוף הטורי של R_3 ו- R_4 . 💡

סעיף א — ההתנגדות השקולה של המעגל

R_3 ו- R_4 מחוברים בטור, הצירוף שלהם מקביל ל- R_2 , והכול בטור ל- R_1 :

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 6 + 4 = 10\ \Omega$$

$$R_p = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{10 \times 10}{10 + 10} = 5\ \Omega$$

$$R_T = R_1 + R_p = 7 + 5 = 12\ \Omega$$

$$R_T = 12\ \Omega$$

סעיף ב — הזרם דרך R_1

R_1 נמצא בטור למקור, ולכן זורם דרכו הזרם הכולל של המעגל:

$$I_1 = \frac{E}{R_T} = \frac{48}{12} = 4\ \text{A}$$

$$I_1 = 4\ \text{A}$$

סעיף ג — המתח על R_4

נחשב את המתח על הקבוצה המקבילית, ממנו את הזרם בענף הטורי, וממנו את המתח על R_4 :

$$U_p = I_1 \cdot R_p = 4 \times 5 = 20 \text{ V}$$

$$I_{34} = \frac{U_p}{R_{34}} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

$$U_{R4} = I_{34} \cdot R_4 = 2 \times 4 = 8 \text{ V}$$

$$U_{R4} = 8 \text{ V}$$

שאלה 2 — שני מקורות, רשת דו-צמתית

נתונים: $E_1 = 22V$, $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = 6\ \Omega$, $E_2 = 18V$

מבנה המעגל: שלושה ענפים מחוברים בין הצומת העליון לצומת התחתון — ענף שמאלי עם E_1 בטור ל- R_1 , ענף אמצעי עם R_2 , וענף ימני עם R_3 ו- R_4 בטור למקור E_2 .

סעיף א — המתח על R_2

נסמן ב- V את מתח הצומת העליון (המתח על R_2) ונרשום משוואת צומת לפי חוק הזרמים של קירכהוף. בענף הימני ההתנגדות הכוללת היא $R_3 + R_4 = 16\ \Omega$:

$$\frac{E_1 - V}{R_1} + \frac{E_2 - V}{R_3 + R_4} = \frac{V}{R_2}$$

$$\frac{22 - V}{6} + \frac{18 - V}{16} = \frac{V}{4}$$

נכפול את שני האגפים ב-48:

$$8(22 - V) + 3(18 - V) = 12V$$

$$176 + 54 = 12V + 8V + 3V \rightarrow 230 = 23V \rightarrow V = 10\ V$$

$$U_{R_2} = 10\ V$$

סעיף ב — הזרם דרך R_1 וכיוונו

$$I_1 = \frac{E_1 - V}{R_1} = \frac{22 - 10}{6} = 2\ A$$

התוצאה חיובית, ולכן הזרם זורם מהמקור E_1 דרך R_1 אל הצומת העליון (משמאל לימין באיור), כלומר המקור E_1 מספק זרם למעגל.

$$I_1 = 2 \text{ A}$$

סעיף ג — ההספק המתפתח בנגד R_4

הזרם בענף הימני זורם דרך R_3 ו- R_4 :

$$I_3 = \frac{E_2 - V}{R_3 + R_4} = \frac{18 - 10}{16} = 0.5 \text{ A}$$

בדיקת צומת: הסכום $I_1 + I_3$ שווה ל- $2 + 0.5 = 2.5 \text{ A}$, וזה בדיוק הזרם דרך R_2 שערכו $V/R_2 = 10/4$ מתקיים. ומכאן ההספק בנגד R_4 :

$$P_{R4} = I_3^2 \cdot R_4 = 0.5^2 \times 6 = 1.5 \text{ W}$$

$$P_{R4} = 1.5 \text{ W}$$

שאלה 3 — מעגל קבלים בטור ובמקביל

נתונים: $E = 24V$, $C_1 = 10\mu F$, $C_2 = 18\mu F$, $C_3 = 20\mu F$, $C_4 = 30\mu F$

מבנה המעגל: הקבל C_1 מחובר בטור למקור; הקבל C_2 מחובר במקביל לצירוף הטורי של C_3 ו- C_4 . 💡

סעיף א — הקיבול השקול של המעגל

C_3 ו- C_4 בטור, הצירוף במקביל ל- C_2 , והתוצאה בטור ל- C_1 :

$$C_{34} = \frac{C_3 \cdot C_4}{C_3 + C_4} = \frac{20 \times 30}{20 + 30} = 12 \mu F$$

$$C_p = C_2 + C_{34} = 18 + 12 = 30 \mu F$$

$$C_T = \frac{C_1 \cdot C_p}{C_1 + C_p} = \frac{10 \times 30}{10 + 30} = 7.5 \mu F$$

$$C_T = 7.5 \mu F$$

סעיף ב — המטען האגור בקבל C_1

C_1 מחובר בטור למקור, ולכן הוא נושא את המטען הכולל שהמקור מספק:

$$Q_1 = Q_T = C_T \cdot E = 7.5 \times 24 = 180 \mu C$$

$$Q_1 = 180 \mu C$$

סעיף ג — האנרגייה האגורה בקבל C_4

נמצא את המתח על C_1 , ממנו את המתח על הקבוצה המקבילית, וממנו את המתח על C_4 :

$$U_{C1} = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{180}{10} = 18 \text{ V}$$

$$U_p = E - U_{C1} = 24 - 18 = 6 \text{ V}$$

$$Q_{34} = C_{34} \cdot U_p = 12 \times 6 = 72 \text{ } \mu\text{C}$$

$$U_{C4} = \frac{Q_{34}}{C_4} = \frac{72}{30} = 2.4 \text{ V}$$

$$W_{C4} = \frac{1}{2} \cdot C_4 \cdot U_{C4}^2 = 0.5 \times 30 \times 10^{-6} \times 2.4^2 = 86.4 \times 10^{-6} \text{ J}$$

$$W_{C4} = 86.4 \text{ } \mu\text{J}$$

שאלה 4 — מעגל עם מד-זרם אידיאלי

נתונים: $E = 20V$, $I = 0.5A$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, R_1 מחובר בטור למד-זרם אידיאלי) מחובר במקביל ל- R_3 .

מבנה המעגל: R_1 מחובר בטור למקור; R_2 (בטור למד-זרם אידיאלי) מחובר במקביל ל- R_3 . 

סעיף א — ההתנגדות השקולה של המעגל

לפי חוק אום למעגל השלם:

$$R_T = \frac{E}{I} = \frac{20}{0.5} = 40\ \Omega$$

$$R_T = 40\ \Omega$$

סעיף ב — ההתנגדות של הנגד R_1

מד-הזרם אידיאלי והתנגדותו אפס, ולכן R_2 ו- R_3 מקבילים זה לזה:

$$R_p = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\ \Omega$$

$$R_1 = R_T - R_p = 40 - 4 = 36\ \Omega$$

$$R_1 = 36\ \Omega$$

סעיף ג — קריאת מד-הזרם

נחשב את המתח על הקבוצה המקבילית, וממנו את הזרם דרך R_2 — הוא הזרם שמד-הזרם מודד:

$$U_p = I \cdot R_p = 0.5 \times 4 = 2\ V$$

$$I_A = \frac{U_p}{R_2} = \frac{2}{20} = 0.1\ A$$

$$I_A = 0.1 \text{ A}$$

פרק שני — זרם חילופין

שאלה 5 — מעגל RLC טורי בזרם חילופין

נתונים: $R = 60 \Omega \cdot L = 250\text{mH} \cdot C = 20\mu\text{F} \cdot u(t) = 10\sqrt{2} \sin(500t)\text{V} \cdot U = 10\text{V} \cdot \omega = 500 \text{ rad/s}$

סעיף א1 — עכבת המעגל

$$X_L = \omega L = 500 \times 0.25 = 125 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500 \times 20 \times 10^{-6}} = 100 \Omega$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 60 + j25 \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{60^2 + 25^2} = \sqrt{4225} = 65 \Omega ; \phi = \arctan\left(\frac{25}{60}\right) = 22.62^\circ$$

$$Z = 60 + j25 \Omega = 65 \angle 22.62^\circ \Omega$$

סעיף א2 — אופיו של המעגל

ההיגב ההשראותי גדול מההיגב הקיבולי, החלק המדומה חיובי והזווית חיובית, ולכן אופי המעגל השראותי — הזרם מפגר אחרי המתח.

סעיף ב — הזרם היעיל במעגל

$$I = \frac{U}{|Z|} = \frac{10}{65} = 0.154 \text{ A}$$

בכתיב מרוכב, כאשר מתח המקור בזווית אפס, הזרם מפגר בזווית העכבה:

$$I = 0.154 \angle -22.62^\circ \text{ A}$$

$$I = 0.154 \text{ A}$$

סעיף ג — המתחים היעילים על הרכיבים

המתח על הנגד בפאזה עם הזרם, המתח על הסליל מקדים את הזרם ב- 90° , והמתח על הקבל מפגר אחרי הזרם ב- 90° :

$$U_R = I \cdot R = 0.154 \times 60 = 9.23 \text{ V} \rightarrow U_R = 9.23 \angle -22.62^\circ \text{ V}$$

$$U_L = I \cdot X_L = 0.154 \times 125 = 19.23 \text{ V} \rightarrow U_L = 19.23 \angle 67.38^\circ \text{ V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 0.154 \times 100 = 15.38 \text{ V} \rightarrow U_C = 15.38 \angle -112.62^\circ \text{ V}$$

$$U_R = 9.23 \angle -22.62^\circ \text{ V} ; U_L = 19.23 \angle 67.38^\circ \text{ V} ; U_C = 15.38 \angle -112.62^\circ \text{ V}$$

שאלה 6 — מעגל מקבילי R, L, C בזרם חילופין

נתונים: $U = 230V$ · $f = 50Hz$ · $R = 460 \Omega$ · $I_L = 0.6A$ (קריאת A_1) · $I_C = 0.4A$ (קריאת A_2) · חיבור מקבילי

סעיף א — הזרם הכולל I

זרם הנגד בפאזה עם המתח:

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{230}{460} = 0.5 \text{ A}$$

זרם הסליל מפגר אחרי המתח ב- 90° וזרם הקבל מקדים ב- 90° , ולכן הם מנוגדים זה לזה:

$$I = I_R + j(I_C - I_L) = 0.5 + j(0.4 - 0.6) = 0.5 - j0.2 \text{ A}$$

$$|I| = \sqrt{0.5^2 + 0.2^2} = \sqrt{0.29} = 0.539 \text{ A} ; \quad \phi = \arctan\left(\frac{-0.2}{0.5}\right) = -21.8^\circ$$

הזווית שלילית, ולכן אופי הזרם הכולל השראותי — הזרם מפגר אחרי המתח.

$$I = 0.5 - j0.2 \text{ A} = 0.539 \angle -21.8^\circ \text{ A}$$

סעיף ב — ההספק הפעיל של המעגל

הספק פעיל מתפתח רק בנגד:

$$P = U \cdot I_R = 230 \times 0.5 = 115 \text{ W}$$

$$P = 115 \text{ W}$$

סעיף ג — השראות הסליל L

$$X_L = \frac{U}{I_L} = \frac{230}{0.6} = 383.33 \quad \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{383.33}{2\pi \times 50} = \frac{383.33}{314.16} = 1.22 \text{ H}$$

$$L \approx 1.22 \text{ H}$$

שאלה 7 — מעגל RLC טורי בתהודה

נתונים: $R = 1 \text{ k}\Omega$ · $L = 0.2 \text{ H}$ · $C = 2 \mu\text{F}$ · $U = 200 \text{ V}$

סעיף א — התנאי לתהודה

המעגל נמצא במצב תהודה כאשר ההיגב ההשראותי שווה להיגב הקיבולי. במצב זה החלק המדומה של העכבה מתאפס, העכבה ממשית ומינימלית, והזרם נמצא בפאזה עם מתח המקור:

$$X_L = X_C \Leftrightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

סעיף ב — תדר התהודה

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{L C}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{0.2 \times 2 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{2\pi \times 6.325 \times 10^{-4}} = 251.6 \text{ Hz}$$

$$f_0 \approx 251.6 \text{ Hz}$$

סעיף ג — עכבת המעגל במצב תהודה

בתהודה ההיגבים מבטלים זה את זה, ונותרת ההתנגדות בלבד:

$$Z_0 = R = 1 \text{ k}\Omega = 1000 \text{ }\Omega$$

$$Z_0 = 1 \text{ k}\Omega$$

סעיף ד — הזרם במעגל במצב תהודה

$$I_0 = \frac{U}{R} = \frac{200}{1000} = 0.2 \text{ A}$$

$$I_0 = 0.2 \text{ A}$$

שאלה 8 — רשת תלת-מופעית, עומס סימטרי בחיבור כוכב

נתונים: U (קווי) = $400V$ · $f = 50Hz$ · $Z = 20 + j15 \Omega$ לכל מופע · חיבור כוכב

סעיף א — הזרם הקווי והזרם המופעי

$$|Z| = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25 \Omega ; \quad \phi = \arctan\left(\frac{15}{20}\right) = 36.87^\circ$$

בחיבור כוכב המתח המופעי קטן פי שורש שלוש מהמתח הקווי, והזרם הקווי שווה לזרם המופעי:

$$U(\text{מופע}) = \frac{U(\text{קווי})}{\sqrt{3}} = \frac{400}{1.732} = 231 V$$

$$I(\text{מופע}) = \frac{231}{25} = 9.24 A$$

$$I(\text{קווי}) = I(\text{מופע}) = 9.24 A$$

סעיף ב — ההספק הפעיל, ההיגבי והמדומה

$$\cos \phi = \frac{R}{|Z|} = \frac{20}{25} = 0.8 ; \quad \sin \phi = \frac{X}{|Z|} = \frac{15}{25} = 0.6$$

$$S = \sqrt{3} \cdot U(\text{קווי}) \cdot I(\text{קווי}) = 6400 = 9.24 \times 400 \times 1.732 VA$$

$$P = S \cdot \cos \phi = 6400 \times 0.8 = 5120 W$$

$$Q = S \cdot \sin \phi = 6400 \times 0.6 = 3840 var$$

$$P = 5120 W ; Q = 3840 var ; S = 6400 VA$$

סעיף ג — משולש ההספקים

משולש ההספקים הוא משולש ישר-זווית: הניצב האופקי הוא ההספק הפעיל $P = 5120 W$; הניצב האנכי הוא ההספק ההיגבי $Q = 3840 var$, המצויר כלפי מעלה מפני שהעומס השראותי; היתר הוא ההספק המדומה S

6400 VA. הזווית שבין P ל-S היא $\phi = 36.87^\circ$. נוודא לפי משפט פיתגורס:

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{5120^2 + 3840^2} = \sqrt{40960000} = 6400 \text{ VA} = S \quad \checkmark$$

$$S = 6400 \text{ VA} \angle 36.87^\circ$$

שאלה 9 — פישוט פונקציות בוליאניות

נתונים: הפונקציה F_1 נתונה כביטוי בוליאני. הפונקציה F_2 נתונה בטבלת אמת של שלושה משתנים A, B, C

סעיף א — פישוט הפונקציה F_1

נתון הביטוי:

$$F_1(A, B, C) = \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

נוציא גורם משותף מהאיבר הראשון ומהאיבר השלישי:

$$\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{C} (B + \bar{B}) = \bar{A} \cdot \bar{C} \cdot 1 = \bar{A} \cdot \bar{C}$$

$$F_1 = A + \bar{A} \cdot \bar{C}$$

לפי הזהות $x + \bar{x} \cdot y = x + y$ מתקבל:

$$F_1 = A + \bar{C}$$

$$F_1 = A + \bar{C}$$

סעיף ב — מפת קרנו לפונקציה F_2 ופישוטה

מטבלת האמת הפונקציה שווה 1 בכל השורות פרט לשתיים: $A=0, B=1, C=0$ וכן $A=1, B=1, C=1$. מפת קרנו:

$A \setminus BC$	00	01	11	10
0	1	1	1	0
1	1	1	0	1

הקיבוצים: רביעייה של כל התאים שבהם $B=0$ (העמודות 00 ו-01), זוג התאים $\bar{A} \cdot C$ (השורה העליונה בעמודות 01 ו-11) וזוג התאים $A \cdot \bar{C}$ (השורה התחתונה בעמודות 00 ו-10):

$$F_2 = \bar{B} + \bar{A} \cdot C + A \cdot \bar{C}$$

שני האיברים האחרונים הם פונקציית XOR, ולכן אפשר לרשום גם $F_2 = \bar{B} + (A \oplus C)$.

$$F_2 = \bar{B} + \bar{A} \cdot C + A \cdot \bar{C}$$

סעיף ב2 — מימוש הפונקציה המפושטת בשערים לוגיים

המימוש הישיר של הפונקציה המפושטת דורש שלושה שערי NOT ליצירת המשלימים של A, B ו-C; שני שערי AND דו-כניסיים — האחד למכפלה $\bar{A} \cdot C$ והשני למכפלה $A \cdot \bar{C}$; ושער OR תלת-כניסי המחבר את $\bar{B}$, את $\bar{A} \cdot C$ ואת $A \cdot \bar{C}$ ונותן במוצאו את F_2 . לחלופין אפשר לממש בעזרת שער XOR יחיד עבור $A \oplus C$, מהפך יחיד עבור $\bar{B}$ ושער OR דו-כניסי.

שאלה 10 — מערכת שערים ופישוטה

נתונים: לפי התרשים — שער AND שכניסותיו X ו- $\bar{Y}$ נותן את F_1 · שער NAND שכניסותיו $\bar{Y}$ ו- $\bar{Z}$ נותן את F_2 · שער OR מחבר את F_1 ו- F_2 ונותן את F

סעיף א — ביטויי הפונקציות F_1 , F_2 ו-F

מוצא שער ה-AND:

$$F_1 = X \cdot \bar{Y}$$

את מוצא שער ה-NAND נפתח לפי משפט דה-מורגן:

$$F_2 = \overline{\bar{Y} \cdot \bar{Z}} = Y + Z$$

$$F = F_1 + F_2 = X \cdot \bar{Y} + Y + Z$$

$$F_1 = X \cdot \bar{Y} ; F_2 = \overline{\bar{Y} \cdot \bar{Z}} = Y + Z ; F = X \cdot \bar{Y} + Y + Z$$

סעיף ב — פישוט F למינימום משתנים

לפי הזהות $X \cdot \bar{Y} + Y = X + Y$:

$$F = X \cdot \bar{Y} + Y + Z = (X + Y) + Z = X + Y + Z$$

$$F = X + Y + Z$$

סעיף ג — ערך הפונקציה עבור $X = 1, Y = 0, Z = 0$

$$F = X + Y + Z = 1 + 0 + 0 = 1$$

בפונקציית OR מספיק שכניסה אחת שווה 1 כדי שהמוצא יהיה 1, וכאן $X = 1$.

$$F = 1$$