

# הצעה לפתרון מלא — מערכות חשמל

בגרות · קיץ נבצרים תשפ"א 2021 · שאלון 845381 · שאלות 1-10

בנוי על ידי פהד גאנץ

**על המסמך:** הצעה לפתרון מלא לשאלון 845381 — מערכות חשמל, מועד נבצרים קיץ תשפ"א 2021. השאלון בנוי משלושה פרקים ובהם עשר שאלות: פרק ראשון — זרם ישר (שאלות 1-4), פרק שני — זרם חילופין (שאלות 5-8), ופרק שלישי — מערכות ספרתיות (שאלות 9-10).

## שאלה 1 — מעגל משולב בזרם ישר

נתונים:  $R_1 = 9 \Omega \cdot R_2 = 6 \Omega \cdot R_3 = 4 \Omega \cdot R_4 = 2.5 \Omega \cdot R_5 = 3.5 \Omega \cdot I = 2A$

**מבנה המעגל:** בצד ימין של המקור מחוברים  $R_1$  ו- $R_2$  במקביל. בצד שמאל מחובר  $R_3$  במקביל לצירוף הטורי של  $R_4$  ו- $R_5$ . שני הצירופים השקולים מחוברים זה לזה בטור דרך המקור.

### סעיף א — מתח המקור E

תחילה מפשטים את המעגל. בצד שמאל הנגדים  $R_4$  ו- $R_5$  מחוברים בטור זה לזה, והצירוף שלהם מקביל לנגד  $R_3$ :

$$R_{45} = R_4 + R_5 = 2.5 + 3.5 = 6 \Omega$$

$$R(\text{שמאלי}) = \frac{R_{45} \cdot R_3}{R_{45} + R_3} = \frac{6 \times 4}{6 + 4} = \frac{24}{10} = 2.4 \Omega$$

בצד ימין הנגדים  $R_1$  ו- $R_2$  מחוברים במקביל:

$$R(\text{ימני}) = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{9 \times 6}{9 + 6} = \frac{54}{15} = 3.6 \Omega$$

שתי ההתנגדויות השקולות מחוברות בטור, ולכן ההתנגדות הכוללת היא סכומן, ומתח המקור מתקבל מחוק אוהם:

$$R_T = R(\text{שמאלי}) + R(\text{ימני}) = 6 = 3.6 + 2.4 \Omega$$

$$E = I \cdot R_T = 2 \times 6$$

$$E = 12 V$$

### סעיף ב — הזרם דרך הנגד $R_1$

הזרם הכולל זורם דרך הצירוף המקבילי הימני, ולכן המתח על שני הנגדים  $R_1$  ו- $R_2$  הוא:

$$U_{12} = I \cdot R(\text{ימני}) = 7.2 = 3.6 \times 2 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = \frac{7.2}{9}$$

$$I_1 = 0.8 \text{ A}$$

### סעיף ג — ההספק על הנגד $R_2$

המתח על  $R_2$  הוא אותו מתח מקבילי. תחילה מחשבים את הזרם דרך  $R_2$  ואחר כך את ההספק:

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = \frac{7.2}{6} = 1.2 \text{ A}$$

$$P_2 = U_{12} \cdot I_2 = 7.2 \times 1.2$$

בדיקה: סכום זרמי שני הענפים הוא  $I_2 = 1.2 + 0.8 \text{ A}$ , בהתאמה מלאה לזרם המקור.

$$P_2 = 8.64 \text{ W}$$

## שאלה 2 — מעגל עם שני מקורות (שיטת החוגים)

נתונים:  $E_1 = 3V$ ,  $R_1 = 3\Omega$ ,  $E_2 = 16V$ ,  $R_2 = 5\Omega$ ,  $R_3 = 6\Omega$

**מבנה המעגל:** המקור  $E_1$  בטור עם  $R_1$  בענף השמאלי, המקור  $E_2$  בטור עם  $R_2$  בענף הימני, והנגד  $R_3$  בענף האמצעי בין הצמתים A ל-B. הזרמים  $I_1$  ו- $I_2$  מסומנים באיור כנכנסים אל הצומת A.

### סעיף א — הזרמים $I_1$ ו- $I_2$

לפי חוק הזרמים של קירכהוף, הזרם דרך  $R_3$  (מ-A אל B) הוא סכום שני הזרמים הנכנסים:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

נכתוב את חוק המתחים של קירכהוף עבור החוג השמאלי ועבור החוג הימני:

$$E_1 = I_1 R_1 + (I_1 + I_2) R_3 \rightarrow 3 = 3 I_1 + 6(I_1 + I_2)$$

$$E_2 = I_2 R_2 + (I_1 + I_2) R_3 \rightarrow 16 = 5 I_2 + 6(I_1 + I_2)$$

מסדרים את שתי המשוואות ופותרים את המערכת:

$$9 I_1 + 6 I_2 = 3$$

$$6 I_1 + 11 I_2 = 16$$

$$99 I_1 + 66 I_2 = 33$$

$$36 I_1 + 66 I_2 = 96$$

$$63 I_1 = -63 \rightarrow I_1 = -1 \text{ A}$$

$$9(-1) + 6 I_2 = 3 \rightarrow I_2 = 2 \text{ A}$$

הסימן השלילי של  $I_1$  מלמד שכיוון הזרם בפועל הפוך לחץ שסומן באיור: זרם בגודל 1 אמפר זורם בענף השמאלי מן הצומת A אל המקור  $E_1$ , שכן המקור החזק  $E_2$  דוחף זרם דרך  $E_1$ .

$$I_1 = -1 \text{ A} ; I_2 = 2 \text{ A}$$

### סעיף ב(1) — הזרם דרך הנגד $R_3$

$$I_3 = I_1 + I_2 = (-1) + 2$$

$$I_3 = 1 \text{ A}$$

### סעיף ב(2) — כיוון הזרם בנגד $R_3$

הזרם  $I_3$  יצא חיובי לפי הכיוון שהונח, מ-A אל B. אל הצומת A נכנסים בפועל 2 אמפר מן הענף הימני, ומן הצומת יוצא 1 אמפר אל הענף השמאלי. לפי חוק הזרמים של קירכהוף, יתרת הזרם, 1 אמפר, זורמת מן הצומת A דרך  $R_3$  אל הצומת B.

$$I_3 = 1 \text{ A} \quad (A \rightarrow B)$$

### סעיף ג — ההספק הנצרך על הנגד $R_3$

$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = 1^2 \times 6$$

$$P_3 = 6 \text{ W}$$

### שאלה 3 — מעגל קבלים

נתונים:  $2V = (C_3 \text{ על } C_1 = 2 \mu F \cdot C_2 = 4 \mu F \cdot C_3 = 6 \mu F \cdot C_4 = 8 \mu F \cdot U$

**מבנה המעגל:** הקבלים  $C_2$  ו- $C_3$  מחוברים בטור זה לזה, והצירוף הטורי שלהם מקביל לקבל  $C_1$ . הצירוף המקבילי כולו מחובר בטור לקבל  $C_4$  ולמקור  $E$ . מד-מתח אידיאלי מודד את המתח על  $C_3$ .

#### סעיף א — המתח והמטען על הקבלים $C_2$ ו- $C_4$

המטען על  $C_3$  מחושב ישירות מהמתח המדוד עליו. בחיבור טורי המטען זהה על שני הקבלים, ולכן המטען על  $C_2$  שווה למטען על  $C_3$ :

$$Q_3 = C_3 \cdot U_3 = 6 \times 2 = 12 \mu C$$

$$Q_2 = Q_3 = 12 \mu C$$

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{12}{4} = 3 V$$

המתח על הצירוף המקבילי (וגם על  $C_1$ ) הוא סכום המתחים בענף הטורי, וממנו מחשבים את מטען  $C_1$ :

$$U(\text{מקבילי}) = U_2 + U_3 = 3 + 2 = 5 V$$

$$Q_1 = C_1 \cdot U(\text{מקבילי}) = 10 = 5 \times 2 \mu C$$

הקבל  $C_4$  מחובר בטור אל הצירוף המקבילי כולו, ולכן המטען עליו שווה לסכום מטעני שני הענפים המקביליים:

$$Q_4 = Q_1 + Q_2 = 10 + 12 = 22 \mu C$$

$$U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{22}{8} = 2.75 V$$

$$U_2 = 3 V ; Q_2 = 12 \mu C ; U_4 = 2.75 V ; Q_4 = 22 \mu C$$

#### סעיף ב — מתח המקור $E$

לפי חוק המתחים של קירכהוף, מתח המקור שווה לסכום המתח על הצירוף המקבילי והמתח על  $C_4$ :

$$E = U(\text{מקבילי}) + U_4 = 5 + 2.75$$

$$E = 7.75 \text{ V}$$

### סעיף ג — הקיבול השקול של המעגל

$$C_{23} = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3} = \frac{4 \times 6}{4 + 6} = 2.4 \text{ } \mu\text{F}$$

$$C(\text{מקבילי}) = C_{23} + C_1 = 2.4 + 2 = 4.4 \text{ } \mu\text{F}$$

$$C_{eq} = \frac{C(\text{מקבילי}) \cdot C_4}{C(\text{מקבילי}) + C_4} = \frac{4.4 \times 8}{4.4 + 8} = \frac{35.2}{12.4} \approx 2.84 \text{ } \mu\text{F}$$

בדיקה: מכפלת הקיבול השקול במתח המקור נותנת מטען כולל של כ-22  $\mu\text{C}$ , בהתאמה למטען שחושב על  $C_4$ .

$$C_{eq} \approx 2.84 \text{ } \mu\text{F}$$

## שאלה 4 — צרכנים ביתיים במקביל

נתונים:  $E = 250V$  ·  $P_1 = 1.5 kW$  ·  $P_2 = 1.2 kW$  ·  $P_3 = 1.8 kW$  · חיבור מקבילי

### סעיף א — הזרמים $I_1, I_2$ ו- $I_3$

בחיבור מקבילי כל צרכן מקבל את מלוא מתח המקור, ולכן הזרם דרך כל צרכן מתקבל מנוסחת ההספק:

$$I_1 = \frac{P_1}{U} = \frac{1500}{250} = 6 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U} = \frac{1200}{250} = 4.8 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{P_3}{U} = \frac{1800}{250} = 7.2 \text{ A}$$

$$I_1 = 6 \text{ A} ; I_2 = 4.8 \text{ A} ; I_3 = 7.2 \text{ A}$$

### סעיף ב — התנגדות כל אחד מהצרכנים

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{250}{6} \approx 41.67 \text{ } \Omega$$

$$R_2 = \frac{U}{I_2} = \frac{250}{4.8} \approx 52.08 \text{ } \Omega$$

$$R_3 = \frac{U}{I_3} = \frac{250}{7.2} \approx 34.72 \text{ } \Omega$$

$$R_1 \approx 41.67 \text{ } \Omega ; R_2 \approx 52.08 \text{ } \Omega ; R_3 \approx 34.72 \text{ } \Omega$$

### סעיף ג — הספק המקור

בחיבור מקבילי הספק המקור שווה לסכום הספקי הצרכנים:



$$P_T = P_1 + P_2 + P_3 = 1500 + 1200 + 1800 = 4500 \text{ W}$$

בדיקה: הזרם הכולל הוא 18 אמפר, ומכפלתו במתח המקור נותנת  $W 4500 = 18 \times 250$ .

$$P_T = 4500 \text{ W} = 4.5 \text{ kW}$$

## שאלה 5 — מעגל RLC טורי לפי מדידות מתח

נתונים:  $f = 50\text{Hz}$  ·  $I = 2\text{A}$  ·  $U_R = 3\text{V}$  ·  $U_L = 12\text{V}$  ·  $U_C = 8\text{V}$  חיבור טוריסעיף א — מתח המקור  $U$  (הערך היעיל)

במעגל טורי המתח על הנגד במופע עם הזרם, המתח על המשרן מקדים את הזרם ב- $90^\circ$ , והמתח על הקבל מפגר אחריו ב- $90^\circ$ . לכן מחברים את המתחים חיבור וקטורי:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{3^2 + (12 - 8)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$$

$$U = 5 \text{ V}$$

## סעיף ב — התנגדות הנגד, השראות המשרן וקיבול הקבל

בכל רכיב הזרם הוא 2 אמפר, ולכן מחלקים את המתח על כל רכיב בזרם:

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{3}{2} = 1.5 \ \Omega$$

$$X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{12}{2} = 6 \ \Omega \rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{6}{2\pi \times 50} \approx 0.0191 \text{ H} \approx 19.1 \text{ mH}$$

$$X_C = \frac{U_C}{I} = \frac{8}{2} = 4 \ \Omega \rightarrow C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 4} \approx 796 \ \mu\text{F}$$

$$R = 1.5 \ \Omega ; L \approx 19.1 \text{ mH} ; C \approx 796 \ \mu\text{F}$$

## סעיף ג — ההספק בכל אחד ממרכיבי המעגל

הנגד צורך הספק ממשי, ואילו המשרן והקבל צורכים הספק היגבי בלבד:

$$P_R = U_R \cdot I = 3 \times 2 = 6 \text{ W}$$

$$Q_L = U_L \cdot I = 12 \times 2 = 24 \text{ var}$$

$$Q_C = U_C \cdot I = 8 \times 2 = 16 \text{ var}$$

בדיקה: ההספק המדומה של המקור מתקבל בשתי דרכים ומתלכד:

$$S = U \cdot I = 5 \times 2 = 10 \text{ VA}$$

$$S = \sqrt{P_R^2 + (Q_L - Q_C)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ VA} \checkmark$$

$$P_R = 6 \text{ W} ; Q_L = 24 \text{ var} ; Q_C = 16 \text{ var}$$

## שאלה 6 — מעגל RLC מקבילי

נתונים:  $U = 50 \angle 0^\circ \text{ V}$  ·  $\omega = 600 \text{ rad/s}$  ·  $C = 400 \mu\text{F}$  ·  $L = 13.3 \text{ mH}$  · חיבור מקבילי

**⚠️ נתון חסר:** בשאלון המודפס לא מופיע ערך הנגד R (ככל הנראה פגם בהדפסה). הפתרון נכתב תחת ההנחה  $R = 10 \Omega$ , וכל שלבי החישוב מנוסחים כך שאפשר להציב כל ערך אחר של R באותה דרך.

### סעיף א — היגב המשרן והיגב הקבל

$$X_L = \omega L = 600 \times 0.0133 = 7.98 \Omega \approx 8 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{600 \times 400 \times 10^{-6}} = \frac{1}{0.24} \approx 4.17 \Omega$$

$$X_L \approx 7.98 \Omega ; X_C \approx 4.17 \Omega$$

### סעיף ב — עכבת המעגל ואופיו

במעגל מקבילי נוח לעבוד עם מוליכויות. המוליכויות הכוללת היא סכום מוליכויות הענפים — ענף הקבל תורם מוליכות היגבית חיובית וענף המשרן שלילית:

$$Y = \frac{1}{R} + j \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) = \frac{1}{10} + j(0.24 - 0.125) = 0.1 + j0.115 \text{ S}$$

$$|Y| = \sqrt{0.1^2 + 0.115^2} \approx 0.152 \text{ S}$$

$$Z = \frac{1}{|Y|} = \frac{1}{0.152} \approx 6.57 \Omega$$

זרם הקבל גדול מזרם המשרן, ולכן הרכיב ההיגבי הקיבולי גובר, הזרם הכולל מקדים את המתח, ואופי המעגל קיבולי.

$$Z \approx 6.57 \Omega ; \text{אופי המעגל - קיבולי}$$

## סעיף ג — הזרמים $I_1$ , $I_2$ וזרם המקור הכולל

המתח המשותף על כל הענפים הוא 50 וולט, ולכן:

$$I_1 = \frac{U}{X_L} = \frac{50}{7.98} \approx 6.27 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U}{X_C} = \frac{50}{4.17} = 12 \text{ A}$$

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$$

זרם המקור הוא הסכום הווקטורי של זרמי הענפים:

$$I_T = \sqrt{I_R^2 + (I_2 - I_1)^2} = \sqrt{5^2 + (12 - 6.27)^2} = \sqrt{25 + 32.8} \approx 7.61 \text{ A}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{I_2 - I_1}{I_R}\right) = \arctan\left(\frac{5.73}{5}\right) \approx 48.9^\circ$$

$$I_1 \approx 6.27 \text{ A} ; I_2 = 12 \text{ A} ; I_T \approx 7.61 \angle 48.9^\circ \text{ A}$$

## שאלה 7 — עומס תלת-מופעי בחיבור משולש

נתונים: חיבור משולש ·  $U$  (קווי) =  $16 + j12 \Omega$  ·  $f = 50\text{Hz}$  ·  $400\text{V}$  לכל מופע

### סעיף א — הזרם המופעי והזרם בקווי ההזנה

בחיבור משולש המתח על כל מופע שווה למתח הקווי. תחילה מחשבים את גודל העכבה:

$$|Z| = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20 \Omega$$

$$I(\text{מופעי}) = \frac{U(\text{קווי})}{|Z|} = \frac{400}{20} = 20 \text{ A}$$

בחיבור משולש הזרם הקווי גדול מן הזרם המופעי פי שורש שלוש:

$$I(\text{קווי}) = \sqrt{3} \cdot I(\text{מופעי}) = 34.64 \approx 20 \times 1.732 \text{ A}$$

$$I(\text{מופעי}) = 20 \text{ A} ; I(\text{קווי}) \approx 34.64 \text{ A}$$

### סעיף ב — מקדם ההספק

מקדם ההספק הוא היחס בין ההתנגדות הממשית לגודל העכבה:

$$\cos \phi = \frac{R}{|Z|} = \frac{16}{20} = 0.8$$

$$\cos \phi = 0.8 \quad (\text{מפגר, השראתי})$$

### סעיף ג — ההספק הממשי, ההיגבי והמדומה

$$P = 3 \cdot U(\text{מופע}') \cdot I(\text{מופע}') \cdot \cos \phi = 3 \times 400 \times 20 \times 0.8 = 19200 \text{ W}$$

$$\sin \phi = \frac{X}{|Z|} = \frac{12}{20} = 0.6$$

$$Q = 3 \cdot U(\text{מופע}') \cdot I(\text{מופע}') \cdot \sin \phi = 3 \times 400 \times 20 \times 0.6 = 14400 \text{ var}$$

$$S = 3 \cdot U(\text{מופע}') \cdot I(\text{מופע}') = 24000 = 20 \times 400 \times 3 \text{ VA}$$

בדיקה לפי משולש ההספקים:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{19.2^2 + 14.4^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ kVA} \checkmark$$

$$P = 19.2 \text{ kW} ; Q = 14.4 \text{ kvar} ; S = 24 \text{ kVA}$$

## שאלה 8 — מעגל RLC טורי ותהודה

נתונים:  $R = 4 \Omega$  ·  $L = 6.37 \text{ mH}$  ·  $C = 159 \mu\text{F}$  ·  $U = 120\text{V}$  ·  $f = 200\text{Hz}$  · חיבור טורי

### סעיף א(1) — חישוב הזרם I

מחשבים תחילה את ההיגבים בתדר הנתון, ומהם את העכבה השקולה:

$$X_L = 2\pi f L = 2\pi \times 200 \times 6.37 \times 10^{-3} \approx 8 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2\pi \times 200 \times 159 \times 10^{-6}} \approx 5 \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{4^2 + (8 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5 \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{120}{5}$$

$$I = 24 \text{ A}$$

### סעיף א(2) — המתחים על הנגד, על המשרן ועל הקבל

$$U_R = I \cdot R = 24 \times 4 = 96 \text{ V}$$

$$U_L = I \cdot X_L = 24 \times 8 = 192 \text{ V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 24 \times 5 = 120 \text{ V}$$

בדיקה: החיבור הווקטורי של המתחים מחזיר את מתח המקור:

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{96^2 + 72^2} = \sqrt{14400} = 120 \text{ V} \checkmark$$

$$U_R = 96 \text{ V} ; U_L = 192 \text{ V} ; U_C = 120 \text{ V}$$

### סעיף ב — תדר התהודה



בתדר הנתון היגב המשרן גדול מהיגב הקבל, ולכן המעגל השראתי. במצב תהודה נדרש שוויון בין שני ההיגבים, ולכן יש להנמיך את תדר המקור. תדר התהודה מתקבל מנוסחת תומסון:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{6.37 \times 10^{-3} \times 159 \times 10^{-6}}} = \frac{1}{2\pi \times 1.006 \times 10^{-3}} \approx 158 \text{ Hz}$$

$$f_0 \approx 158 \text{ Hz}$$

## שאלה 9 — פישוט פונקציה בינארית

$$\overline{A + \bar{A} \cdot C \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{C} + B} = F(A, B, C) \text{ נתונים}$$

### סעיף א — פישוט הפונקציה למינימום משתנים

מפשטים תחילה את הביטוי שבתוך הסוגריים, מתחת לקו השלילה. לפי כלל הבליעה המשתנה B בולע את המכפלה שהוא מופיע בה:

$$B \cdot \bar{C} + B = B(\bar{C} + 1) = B$$

$$A + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + B \cdot \bar{C} + B = A + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + B$$

לפי הכלל  $x + \bar{x} \cdot y = x + y$ , המשתנה A בולע את המשלים שלו שבמכפלה:

$$A + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C = A + \bar{B} \cdot C \rightarrow A + \bar{B} \cdot C + B$$

מפעילים את אותו כלל פעם נוספת על המשתנה B והמשלים שלו:

$$A + \bar{B} \cdot C = A + B + C \rightarrow A + B + C$$

כעת מפעילים את השלילה החיצונית לפי משפט דה-מורגן:

$$F = \overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

בדיקה: הפונקציה שווה 1 רק כאשר שלושת המשתנים שווים 0, בהתאמה מלאה בכל שמונה שורות טבלת האמת.

$$F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

### סעיף ב — מימוש הפונקציה המפושטת בשערים לוגיים

הפונקציה המפושטת שקולה לפי משפט דה-מורגן לשלילה של סכום שלושת המשתנים:

$$F = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}} = A + B + C$$

המימוש הפשוט ביותר הוא שער NOR יחיד בעל שלוש כניסות — הכניסות A, B, C והיציאה F. לחלופין אפשר לממש בשערים בסיסיים: שלושה מהפכים היוצרים את שלושת המשלימים, ושער AND בעל שלוש כניסות שמכפיל אותם ומוציא את F.

$$F = \overline{A + B + C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

## שאלה 10 — פונקציה בוליאנית מטבלת אמת

נתונים: פונקציה F של שלושה משתנים A, B, C נתונה בטבלת אמת

### סעיף א — כתיבת ביטוי לפונקציה F לפי טבלת האמת

טבלת האמת של הפונקציה, שבה F שווה 1 בשלוש שורות בלבד:

| A | B | C | F |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

כותבים את הפונקציה כסכום של מכפלות (מינטרמים) עבור השורות שבהן  $F = 1$ :

$$F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

$$F = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

### סעיף ב — פישוט הפונקציה בכללי האלגברה הבוליאנית

מאחדים את שני האיברים הראשונים באמצעות הוצאת גורם משותף:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{C} (\bar{B} + B) = \bar{A} \cdot \bar{C}$$

$$F = \bar{A} \cdot \bar{C} + A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}$$

מוציאים גורם משותף נוסף ומשתמשים בכלל  $\bar{X} + X \cdot Y = \bar{X} + Y$ :

$$F = \overline{C}(\overline{A} + A \cdot \overline{B}) = \overline{C}(\overline{A} + \overline{B})$$

$$F = \overline{C}(\overline{A} + \overline{B}) = \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C}$$

בדיקה: הביטוי המפושט השווה מול כל שמונה שורות טבלת האמת ונמצאה התאמה מלאה.

$$F = \overline{C}(\overline{A} + \overline{B}) = \overline{A} \cdot \overline{C} + \overline{B} \cdot \overline{C}$$

### סעיף ג — מימוש הפונקציה המפושטת בשערים לוגיים

מימוש הצורה המפושטת דורש שני מהפכים היוצרים את המשלימים של A ו-B, שער OR המחבר אותם, מהפך על C, ושער AND המכפיל את מוצא שער ה-OR במשלים של C. דרך חסכונית בשלושה שערים בלבד מתקבלת לפי משפט דה-מורגן:

$$F = \overline{C}(\overline{A} + \overline{B}) = \overline{A \cdot B + C}$$

לפי צורה זו מספיק שער AND על הכניסות A ו-B, שער OR המחבר את המכפלה עם C, ושער NOT ביציאה.

$$F = \overline{C}(\overline{A} + \overline{B}) = \overline{A \cdot B + C}$$