

הצעה לפתרון מלא — מערכות חשמל

בגרות · קיץ תש"ף 2020 · שאלון 845381 · שאלות 1–10

✦ בנוי על ידי פהד גאנץ ✦

על המסמך: הצעה לפתרון מלא לשאלון 845381 — מערכות חשמל, קיץ תש"ף 2020. השאלון בנוי משלושה פרקים ועל הנבחן לענות על חמש שאלות בלבד, מהן לפחות אחת מהפרק השני. שאלות 1–8 עוסקות בזרם ישר, בקבלים, במעגלים מגנטיים ובזרם חילופין, ושאלות 9–10 עוסקות במערכות ספרתיות. במסמך זה נפתרו כל עשר השאלות במלואן.

שאלה 1 — מעגל זרם ישר: התנגדות שקולה, מתח וזרם

$$\text{נתונים: } E = 50\text{V} \cdot R_1 = 5 \Omega \cdot R_2 = 60 \Omega \cdot R_3 = 5 \Omega \cdot R_4 = 25 \Omega$$

מבנה המעגל:  R_1 בטור למקור. הצירוף הטורי של R_3 ו- R_4 מחובר במקביל ל- R_2 , וצירוף מקבילי זה מחובר בטור ל- R_1 .

סעיף א — ההתנגדות השקולה

הנגדים R_3 ו- R_4 מחוברים בטור זה לזה, והצירוף שלהם מקביל לנגד R_2 . התוצאה מתחברת בטור לנגד R_1 :

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 5 + 25 = 30 \Omega$$

$$R_p = \frac{R_2 \cdot R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{60 \times 30}{60 + 30} = \frac{1800}{90} = 20 \Omega$$

$$R_T = R_1 + R_p = 5 + 20$$

$$R_T = 25 \Omega$$

סעיף ב — המתח על הנגד R_2

תחילה נחשב את הזרם הכולל שהמקור מספק, ואחריו את המתח על הצירוף המקבילי, שהוא בדיוק המתח על R_2 :

$$I = \frac{E}{R_T} = \frac{50}{25} = 2 \text{ A}$$

$$U_{R_2} = I \cdot R_p = 2 \times 20$$

$$U_{R_2} = 40 \text{ V}$$

סעיף ג — מדידת הזרם דרך R_4

כדי למדוד את הזרם העובר בנגד R_4 יש לחבר מד-זרם אידיאלי בטור לנגד R_4 , בתוך הענף של R_3 ו- R_4 . הזרם בענף שווה למתח על הצירוף המקבילי מחולק בהתנגדות הענף:

$$I_4 = \frac{U_{R_2}}{R_3 + R_4} = \frac{40}{30}$$

מד-זרם אידיאלי בעל התנגדות אפסית אינו משנה את זרמי המעגל, ולכן יראה את הזרם האמיתי בענף.

$$I_4 \approx 1.33 \text{ A}$$

שאלה 2 — מקור מתח מעשי ומכשירי מדידה

נתונים: $E = 1.5V \cdot R_1 = U = 1.41V \cdot I = 30mA$ = עומס R_2 = התנגדות פנימית $R_2 \cdot$ מכשירים אידיאליים

מבנה המעגל: מקור מתח מעשי — מקור אידיאלי E בטור להתנגדות הפנימית R_1 . מד-הזרם מחובר בטור, ומד-המתח מחובר במקביל לנגד R_2 .

סעיף א — חישוב R_1 ו- R_2

מד-המתח מודד את המתח על R_2 ומד-הזרם מודד את הזרם העובר בו, ולכן לפי חוק אוהם:

$$R_2 = \frac{U}{I} = \frac{1.41}{0.03} = 47 \ \Omega$$

המתח שאובד על ההתנגדות הפנימית הוא ההפרש בין הכוח האלקטרו-מניע של המקור לבין המתח בהדקיו:

$$U_{R_1} = E - U = 1.5 - 1.41 = 0.09 \text{ V}$$

$$R_1 = \frac{U_{R_1}}{I} = \frac{0.09}{0.03}$$

$$R_2 = 47 \ \Omega ; R_1 = 3 \ \Omega$$

סעיף ב — הפסדי ההספק הפנימיים במקור

ההספק הנפלט בהתנגדות הפנימית מחושב מריבוע הזרם כפול ההתנגדות:

$$P_{R_1} = I^2 \cdot R_1 = 0.03^2 \times 3 = 0.0009 \times 3$$

$$P_{R_1} = 0.0027 \text{ W} = 2.7 \text{ mW}$$

סעיף ג — חיבור מקור מעשי זהה במקביל

כאשר מחברים במקביל שני מקורות מעשיים זהים, הכוח האלקטרו-מניע השקול נשאר E , וההתנגדות הפנימית השקולה קטנה למחצית:

$$R_{in} = \frac{R_1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \quad \Omega$$

$$I = \frac{E}{R_{in} + R_2} = \frac{1.5}{1.5 + 47} = \frac{1.5}{48.5} = 30.9 \text{ mA}$$

$$U = I \cdot R_2 = 0.0309 \times 47 = 1.45 \text{ V}$$

הקטנת ההתנגדות הפנימית מקטינה את מפל המתח הפנימי, ולכן קריאת מד-המתח עולה מעט וגם הזרם גדל מעט.

$$I \approx 30.9 \text{ mA} ; U \approx 1.45 \text{ V}$$

שאלה 3 — חיבור מעורב של קבלים

נתונים: $C_1 = 60\mu\text{F}$ · $C_2 = 15\mu\text{F}$ · $C_3 = 5\mu\text{F}$ · $C_4 = 30\mu\text{F}$ · $U_4 = 50\text{V}$

מבנה המעגל: C_1 בטור לצירוף המקבילי של C_2 ו- C_3 , ובטור לקבל C_4 . 💡

סעיף א — הקיבול השקול

הקבלים C_2 ו- C_3 מחוברים במקביל, ולכן קיבוליהם מתחברים, ואז שלושת הצירופים בטור:

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 15 + 5 = 20 \mu\text{F}$$

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{60} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{6}{60}$$

$$C_T = 10 \mu\text{F}$$

סעיף ב — מתח המקור

בחיבור טורי המטען על כל הקבלים שווה. נחשב את המטען דרך C_4 שמתחו נתון:

$$Q = C_4 \cdot U_4 = 30 \times 10^{-6} \times 50 = 1500 \mu\text{C}$$

$$E = \frac{Q}{C_T} = \frac{1500 \times 10^{-6}}{10 \times 10^{-6}}$$

$$E = 150 \text{ V}$$

סעיף ג — המטען האגור בקבל C_3

המתח על הצירוף המקבילי שווה למטען הטורי מחולק בקיבול השקול של הצירוף:

$$U_{23} = \frac{Q}{C_{23}} = \frac{1500 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-6}} = 75 \text{ V}$$

$$Q_3 = C_3 \cdot U_{23} = 5 \times 10^{-6} \times 75$$

$$Q_3 = 375 \text{ } \mu\text{C}$$

סעיף ד — האנרגייה האגורה בקבל C_1

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{1500 \times 10^{-6}}{60 \times 10^{-6}} = 25 \text{ V}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot U_1^2 = 0.5 \times 60 \times 10^{-6} \times 25^2$$

בדיקת עקיבות: סכום המתחים $150 = 50 + 75 + 25$ שווה למתח המקור, כנדרש.

$$W_1 = 0.01875 \text{ J} = 18.75 \text{ mJ}$$

שאלה 4 — מעגל מגנטי (טבעת ברזל)

נתונים: $N = 1000 \cdot \mu_r = 1000 \cdot \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \cdot A = 0.8 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \ell = 0.8 \text{ m} \cdot B = 2.5 \text{ Wb/m}^2$

סעיף א — השטף המגנטי במעגל

$$\Phi = B \cdot A = 2.5 \times 0.8 \times 10^{-4} = 2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Phi = 0.2 \text{ mWb}$$

סעיף ב — החדירות של המעגל המגנטי

החדירות המוחלטת היא מכפלת החדירות היחסית בחדירות האוויר:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 = 1000 \times 4\pi \times 10^{-7}$$

$$\mu \approx 1.257 \times 10^{-3} \text{ } \Omega \cdot \text{s/m}$$

סעיף ג — המיאון (ההתנגדות המגנטית)

$$R_m = \frac{\ell}{\mu \cdot A} = \frac{0.8}{1.257 \times 10^{-3} \times 0.8 \times 10^{-4}}$$

$$R_m \approx 7.96 \times 10^6 \text{ A/Wb}$$

סעיף ד — הזרם בסליל

לפי חוק אוהם למעגל מגנטי, הכוח המגנטו-מניע שווה למכפלת השטף במיאון:

$$F_m = N \cdot I = \Phi \cdot R_m = 2 \times 10^{-4} \times 7.96 \times 10^6 = 1591.5 \text{ A}$$

$$I = \frac{1591.5}{N} = \frac{1591.5}{1000}$$

דרך חלופית: עוצמת השדה $H = B/\mu \approx 1989.4 \text{ A/m}$, ולכן $N \cdot I = H \cdot l \approx 1591.5$ אמפר-כריכות — אותה תוצאה.

$$I \approx 1.59 \text{ A}$$

שאלה 5 — מעגל מקבילי בזרם חילופין

נתונים: $f = 50\text{Hz}$ · $I_L = 4\angle -90^\circ \text{ A}$ · $X_C = 20\ \Omega$ · $X_L = 30\ \Omega$ · $R = 60\ \Omega$ · חיבור מקבילי

סעיף א — פאזור מתח המקור

במעגל מקבילי המתח משותף לכל הענפים. הזרם בסליל מפגר אחרי המתח ב- 90° , ולכן פאזור המתח מתקבל ממכפלת פאזור הזרם בהיגב ההשראות:

$$U = I_L \cdot X_L = 4\angle -90^\circ \times 30\angle 90^\circ = 120\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$U = 120\angle 0^\circ \text{ V}$$

סעיף ב — הזרמים והזרם הכולל

הזרם בנגד נמצא במופע עם המתח, והזרם בקבל מקדים את המתח ב- 90° :

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{120\angle 0^\circ}{60} = 2\angle 0^\circ \text{ A} = 2 + j0 \text{ A}$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{120\angle 0^\circ}{20\angle -90^\circ} = 6\angle 90^\circ \text{ A} = 0 + j6 \text{ A}$$

הזרם הכולל הוא הסכום הפאזורי של שלושת זרמי הענפים:

$$I = I_R + I_L + I_C = 2 + (-j4) + (j6) = 2 + j2 \text{ A} = 2.83\angle 45^\circ \text{ A}$$

$$I_R = 2\angle 0^\circ \text{ A} ; I_C = 6\angle 90^\circ \text{ A} ; I = 2 + j2 = 2.83\angle 45^\circ \text{ A}$$

סעיף ג — עכבת המעגל ואופיו

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{120\angle 0^\circ}{2.83\angle 45^\circ} = 42.43\angle -45^\circ \quad \Omega = 30 - j30 \quad \Omega$$

זווית העכבה שלילית, כלומר הזרם הכולל מקדים את המתח ב- 45° (זרם הקבל גדול מזרם הסליל) — **המעגל קיבולי**.

$$Z = 42.43\angle -45^\circ \quad \Omega$$

שאלה 6 — מעגל RLC טורי בזרם חילופין

נתונים: $R = 30 \Omega$ · $L = 4\text{mH}$ · $C = 8\mu\text{F}$ · $i(t) = 2\sqrt{2}\sin(10^4 t) \text{ A}$ · $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$ · $I = 2\text{ A}$

סעיף א — העכבה השקולה ואופי המעגל

$$X_L = \omega \cdot L = 10^4 \times 4 \times 10^{-3} = 40 \Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{10^4 \times 8 \times 10^{-6}} = 12.5 \Omega$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 30 + j27.5 \Omega$$

$$|Z| = \sqrt{30^2 + 27.5^2} = \sqrt{1656.25} = 40.7 \Omega$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{27.5}{30}\right) = 42.5^\circ$$

ההיגב ההשראותי גדול מההיגב הקיבולי, ולכן המתח מקדים את הזרם ב- 42.5° — **המעגל השראותי**.

$$Z \approx 40.7 \angle 42.5^\circ \Omega$$

סעיף ב — המתחים על הרכיבים ומתח המקור

נבחר את פאזור הזרם כציר הייחוס: $I = 2 \angle 0^\circ \text{ A}$

$$U_R = I \cdot R = 2 \times 30 = 60 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$U_L = I \cdot X_L = 2 \times 40 = 80 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$U_C = I \cdot X_C = 2 \times 12.5 = 25 \angle -90^\circ \text{ V}$$

$$U = U_R + j(U_L - U_C) = 60 + j55 \text{ V} = 81.4 \angle 42.5^\circ \text{ V}$$

$$U_R = 60 \angle 0^\circ \text{ V} ; U_L = 80 \angle 90^\circ \text{ V} ; U_C = 25 \angle -90^\circ \text{ V} ; U = 60 + j55 \approx 81.4 \angle 42.5^\circ \text{ V}$$

$$P = I^2 \cdot R = 2^2 \times 30 = 120 \text{ W}$$

$$Q = I^2 \cdot (X_L - X_C) = 4 \times 27.5 = 110 \text{ var}$$

$$S = U \cdot I = 81.4 \times 2 = 162.8 \text{ VA}$$

בדיקה לפי משולש ההספקים:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{120^2 + 110^2} \approx 162.8 \text{ VA} \quad \checkmark$$

$$P = 120 \text{ W} ; Q = 110 \text{ var} ; S \approx 162.8 \text{ VA}$$

שאלה 7 — מעגל RLC טורי במצב תהודה

נתונים: $R = 200 \Omega$ · $U_L = 18V$ · $U_m = 7.07V$ · שני מחזורים שלמים באלפית שנייה · מצב תהודה

סעיף א — זמן המחזור ותדר התהודה

מן הגרף, מחזור שלם אחד נמשך חצי אלפית השנייה:

$$T = 0.5 \text{ msec} = 0.5 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.5 \times 10^{-3}}$$

$$T = 0.5 \text{ msec} ; f_0 = 2000 \text{ Hz} = 2 \text{ kHz}$$

סעיף ב — הערך היעיל של הזרם

הערך היעיל של מתח המקור מתקבל מחלוקת המשרעת בשורש שתיים, ובמצב תהודה העכבה שווה להתנגדות בלבד:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{7.07}{1.414} = 5 \text{ V}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{5}{200} = 0.025 \text{ A}$$

$$I = 25 \text{ mA}$$

סעיף ג — היגב הקבל וקיבולו

במצב תהודה ההיגבים שווים בגודלם, ולכן היגב הקבל שווה להיגב הסליל, המחושב מקריאת מד-המתח:

$$X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{18}{0.025} = 720 \quad \Omega$$

$$X_C = X_L = 720 \quad \Omega$$

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot f_0 \cdot X_C} = \frac{1}{2\pi \times 2000 \times 720}$$

$$C \approx 0.11 \mu\text{F} \approx 110.5 \text{ nF}$$

שאלה 8 — עומס תלת-מופעי סימטרי בחיבור משולש

נתונים: U (קווי) = 400 V · $f = 50\text{ Hz}$ · $R = 30\ \Omega$ · $X_L = 40\ \Omega$ · חיבור משולש

סעיף א — הזרם המופעי

בחיבור משולש המתח על כל מופע שווה למתח הקווי:

$$U(\text{מופעי}) = U(\text{קווי}) = 400\text{ V}$$

$$Z(\text{מופעי}) = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50\ \Omega$$

$$I(\text{מופעי}) = \frac{U(\text{מופעי})}{Z(\text{מופעי})} = \frac{400}{50}$$

$$I(\text{מופעי}) = 8\text{ A}$$

סעיף ב — הזרם הקווי

בחיבור משולש הזרם הקווי גדול פי שורש שלוש מהזרם המופעי:

$$I(\text{קווי}) = \sqrt{3} \cdot I(\text{מופעי}) = 8 \times 1.732$$

$$I(\text{קווי}) \approx 13.86\text{ A}$$

סעיף ג — ההספקים P , Q , S

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} = \frac{30}{50} = 0.6 \quad ; \quad \sin \phi = \frac{X_L}{Z} = \frac{40}{50} = 0.8$$

$$P = 3 \cdot U(\text{מופעי}) \cdot I(\text{מופעי}) \cdot \cos \phi = 3 \times 400 \times 8 \times 0.6 = 5760\text{ W}$$

$$Q = 3 \cdot U(\text{מופעי}) \cdot I(\text{מופעי}) \cdot \sin \phi = 3 \times 400 \times 8 \times 0.8 = 7680\text{ var}$$

$$S = 3 \cdot U(\text{מופעי}) \cdot I(\text{מופעי}) = 9600 = 8 \times 400 \times 3\text{ VA}$$

בדיקה לפי ההספק המדומה בחיבור תלת-מופעי:

$$S = \sqrt{3} \cdot U(\text{קווי}) \cdot I(\text{קווי}) = 9600 \approx 13.86 \times 400 \times 1.732 \text{ VA} \checkmark$$

$$P = 5.76 \text{ kW} ; Q = 7.68 \text{ kvar} ; S = 9.6 \text{ kVA}$$

שאלה 9 — בסיסי ספירה ושערים לוגיים

נתונים: המרת המספר 37 עשרוני לבסיסים 2, 8, 16. מערכת שערים לוגיים מהאיור

סעיף א — הצגת המספר 37 בבסיסים 2, 8, 16

המרה לבסיס 2 בשיטת החלוקות החוזרות (השאריות נקראות מלמטה למעלה):

$$37 : 2 = 18 \quad (1) \quad ; \quad 18 : 2 = 9 \quad (0) \quad ; \quad 9 : 2 = 4 \quad (1)$$

$$4 : 2 = 2 \quad (0) \quad ; \quad 2 : 2 = 1 \quad (0) \quad ; \quad 1 : 2 = 0 \quad (1)$$

המרה לבסיס 8 ולבסיס 16 בחלוקה יחידה:

$$37 : 8 = 4 \quad (5) \rightarrow (45)_8$$

$$37 : 16 = 2 \quad (5) \rightarrow (25)_{16}$$

בדיקה: 100101 בבסיס 2 שווה $37 = 1 + 4 + 32$, וכן $37 = 5 + 8 \cdot 4$ ו- $37 = 5 + 16 \cdot 2$.

$$(37)_{10} = (100101)_2 = (45)_8 = (25)_{16}$$

סעיף ב1 — כתיבת הפונקצייה מן האיור

באיור הכניסה A עוברת דרך מהפך, הכניסה B עוברת דרך מהפך, שתי היציאות נכנסות לשער AND, ויציאת ה-AND עוברת דרך מהפך נוסף אל F:

$$F = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

$$F = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

סעיף ב2 — פישוט באמצעות האלגברה הבוליאנית

לפי משפט דה-מורגן, המשלים של מכפלה שווה לסכום המשלימים, והמשלים הכפול מתבטל:

$$F = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A + B$$

כלומר המעגל כולו שקול לשער OR פשוט בעל שתי כניסות.

$$F = A + B$$

שאלה 10 — מפת קרנו ומימוש פונקצייה

נתונים: פונקצייה F של שלושה משתנים A, B, C נתונה במפת קרנו

סעיף א — פישוט הפונקצייה במינימום משתנים

מפת קרנו של הפונקצייה — שורות לפי C, עמודות לפי AB:

C \ AB	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	0	1

המקומות שבהם $F = 1$ הם $\bar{A} \bar{B} C$, $A \bar{B} \bar{C}$, $A B \bar{C}$, $\bar{A} B C$. נקבץ זוגות שבהם A משתנה:

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}C$$

$$F = \bar{B}\bar{C}(\bar{A} + A) + \bar{B}C(\bar{A} + A) = \bar{B}\bar{C} + \bar{B}C$$

המשתנה A אינו משפיע על הפונקצייה. הביטוי המתקבל הוא בדיוק פעולת XOR בין B ל-C — הפונקצייה שווה 1 כאשר B ו-C שונים זה מזה.

$$F = \bar{B}\bar{C} + \bar{B}C = B \oplus C$$

סעיף ב — מימוש הפונקצייה המפושטת בשערים לוגיים

המימוש הפשוט ביותר הוא שער XOR יחיד ששתי כניסותיו B ו-C ויציאתו F. לחלופין, בלי שער XOR, אפשר לממש בשני מהפכים, שני שערי AND ושער OR לפי הביטוי $\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C$.

סעיף ג — מימוש על גבי מערך המעגלים המשולבים שבנספח

מבין הרכיבים שבנספח בוחרים את המעגל המשולב 7486, המכיל ארבעה שערי XOR בעלי שתי כניסות. אופן החיווט:

- מחברים את הכניסה B להדק 1 ואת הכניסה C להדק 2 של הרכיב 7486.

- היציאה F מתקבלת בהדק 3, שהוא יציאת השער הראשון.

- מחברים את הדק 14 אל מתח ההזנה (VCC) ואת הדק 7 אל האדמה (GND).

- הכניסה A אינה נדרשת כלל, מפני שהפונקצייה המפושטת אינה תלויה בה. את כניסות השערים שאינם בשימוש נהוג לחבר לאדמה כדי למנוע מצבים לא מוגדרים.

יחיד מתוך הרכיב XOR 7486 מומש בשער $F = B \oplus C$

 **הערה:** במבחן יש לענות על חמש שאלות בלבד, מהן לפחות אחת מהפרק השני, אך במסמך זה נפתרו כל עשר השאלות במלואן. כל התוצאות המספריות אומתו בחישוב ממוחשב.